Nom : ............................................ Prénom : ............................................

3C1 Corrigé du devoir III,3 29.06.11

***Durée : 60'*** ***Calculatrice autorisée***

## Question 1 14 (=8+6) points

Dans un repère orthonormé on donne les points $A(0,4)$, $B(-2,-2)$ et $C(6,2)$.

(1) Montrer que le triangle $ABC$ est rectangle et isocèle en $A$ et calculer son aire.

- $\vec{AB}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

On a : $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -2\cdot 6 + (-6)\cdot(-2) = -12 + 12 = 0$

Donc $\vec{AB} \perp \vec{AC}$ et le $\Delta ABC$ est rectangle en $A$.

- $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Donc le $\Delta ABC$ est isocèle de sommet $A$.

- Aire du $\Delta ABC$ : $\dfrac{AB\cdot AC}{2} = \dfrac{(2\sqrt{10})^2}{2} = \dfrac{40}{2} = 20$ u.a.

(2) Déterminer l'équation cartésienne développée du cercle $\mathcal{C}_1$ circonscrit au triangle $ABC$.

Centre de $\mathcal{C}_1$ : $A' = \text{mil}[BC]$ (car $\Delta ABC$ est rectangle en $A$)

$A'(2,0)$

Rayon de $\mathcal{C}_1$ : $AA' = \sqrt{(2-0)^2 + (0-4)^2}$

$= \sqrt{4+16}$

$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Equation de $\mathcal{C}_1$ : $(x-2)^2 + y^2 = 20$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4 - 20 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0$

Question 2 12 (=5+4+3) points

Dans un repère orthonormé on donne les points $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$ et $B\left(\frac{2}{5},-\frac{4}{3}\right)$.

(1) Déterminer une équation cartésienne de la droite $d=\left(AB\right)$.

$\vec{AB}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\\ -\frac{4}{3}+\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \vec{AB}\begin{pmatrix}-\frac{1}{10}\\ -1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{pente}_{(AB)} = \frac{-1}{-\frac{1}{10}} = 10$

Donc $(AB): y = 10x + p$

$A \in (AB) \Leftrightarrow -\frac{1}{3} = 10\cdot\frac{1}{2} + p$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} = 5 + p$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} - \frac{15}{3} = p$

$\Leftrightarrow p = -\frac{16}{3}$

Donc :

$(AB) \equiv y = 10x - \frac{16}{3}$

(2) Déterminer l'équation cartésienne explicite de la médiatrice $m$ de $[AB]$.

$I = \text{mil}[AB] \in m$ , $I\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{5}}{2} ; \frac{-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}{2}\right)$

$= I\left(\frac{9}{20} ; -\frac{5}{6}\right)$

$\text{pente}_m = -\frac{1}{10}$ car $m \perp (AB)$

Donc : $m \equiv y = -\frac{1}{10}x + k$

$I \in m \Leftrightarrow -\frac{5}{6} = -\frac{9}{200} + k \Leftrightarrow k = \frac{9}{200} - \frac{5}{6} = -\frac{473}{600}$

Donc : $m \equiv y = -\frac{1}{10}x - \frac{473}{600}$

(3) Déterminer le point $D$ d'ordonnée 2 appartenant à $m$.

$D(x,2) \in m \Leftrightarrow 2 = -\frac{1}{10}x - \frac{473}{600}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{10}x = 2 + \frac{473}{600}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{10}x = \frac{1673}{600} \quad | \cdot (-10)$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1673}{60}$

Donc : $D\left(-\frac{1673}{60}, 2\right)$

Question 3 11 (=4+7) points

Dans un repère orthonormé, on donne l'ensemble :

$$\mathcal{E} : x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$$

(1) Montrer que $\mathcal{E}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

$a = 2$, $b = 1$, $c = 1$

Test : $\frac{a^2+b^2}{4} - c \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4+1}{4} - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq 0$ VRAI !

Donc $\mathcal{E}$ est un cercle de centre $\Omega\left(-1 ; -\frac{1}{2}\right)$

et de rayon $r = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

(2) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{E}$ avec la droite $\mathcal{D} : x + y + 1 = 0$.

$\mathcal{D} \equiv y = -x - 1$

$\mathcal{E} \cap \mathcal{D} \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0 & (1) \\ y = -x - 1 & (2) \end{cases}$

(2) dans (1) : $x^2 + (-x-1)^2 + 2x - x - \cancel{1} + \cancel{1} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 + 2x - x = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$ $x_1 = \frac{-3-1}{4} = -1$ (3)

$x_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$ (4)

D'où les points d'intersection : ((3) → (2) et (4) → 2)

$I_1(-1, 0)$ et $I_2\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$

## Question 4 — 7 (=3+4) points

Dans un repère orthonormé, on donne le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $\Omega\left(-3,4\right)$ et de rayon 5.

(1) Montrer que l'origine $O$ du repère appartient à $\mathcal{C}_2$.

$O \in \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow O\Omega = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(-3-0)^2+(4-0)^2} = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{9+16} = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{25} = 5$

VRAI !, donc $O \in \mathcal{C}_2$

(2) Etablir une équation cartésienne de la tangente $t$ à $\mathcal{C}_2$ au point $O$.

$O \in t$ et $t \perp (O\Omega)$

$\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, donc $\text{pente}_{(O\Omega)} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \text{pente}_t = \frac{3}{4}$

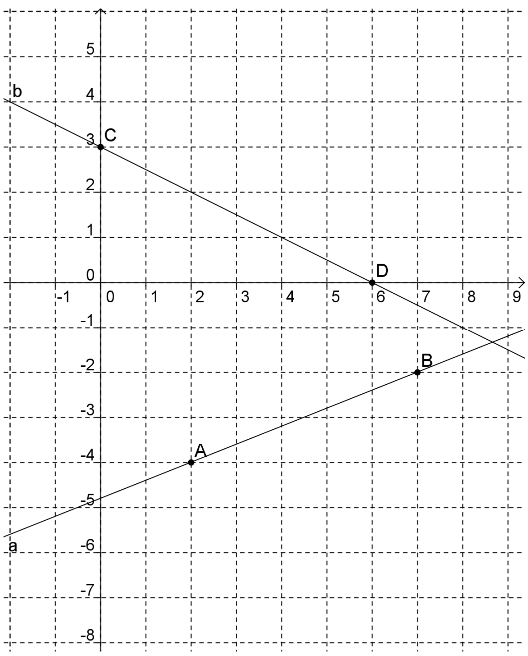
Donc : $t \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + h$

$O \in t \Leftrightarrow 0 = \frac{3}{4}\cdot 0 + h$

$\Leftrightarrow h = 0$

Donc $\underline{\underline{t \equiv y = \frac{3}{4}x}}$

## Question 5 — 8 points




Déterminer une équation cartésienne des deux droites $a$ et $b$ et en déduire les coordonnées du point d'intersection $I$ de ces droites.

$M(x,y) \in (AB)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 5 \\ y+4 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 4 - 5y - 20 = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 5y - 24 = 0$

Donc : $a \equiv 2x - 5y - 24 = 0$

L'équation de $b$ est immédiate :

$$b \equiv y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$a \cap b \begin{cases} 2x - 5y - 24 = 0 & (1) \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 & (2) \end{cases}$$

$(2) \rightarrow (1)$ : $2x - 5\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) - 24 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + \frac{5}{2}x - 15 - 24 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{9x}{2} = 39 \Leftrightarrow x = \frac{78}{9} = \frac{26}{3}$ (3)

$(3) \rightarrow (2)$ : $y = -\frac{13}{3} + \frac{9}{3} = -\frac{4}{3}$ Donc $I\left(\frac{26}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

## Question 6 — 8 points

Montrer que deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée du plan sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

Voir cours !