Jeudi 27 février 2003 - 3^{e} leçon

V^{e} : Épreuve commune en mathématiques - Durée 60 minutes

Répartition : 6 + 7 + 7 + 12 + 14 + 14

Corrigé - modèle

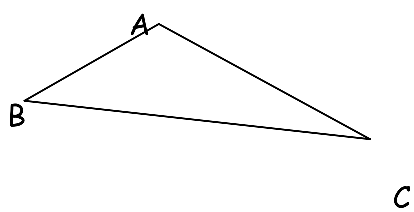
I. Dans chaque situation, écrire l'égalité de Pythagore, … lorsque c'est possible. Justifier. (On ne demande pas de faire les calculs).

<u>cas n°1</u>

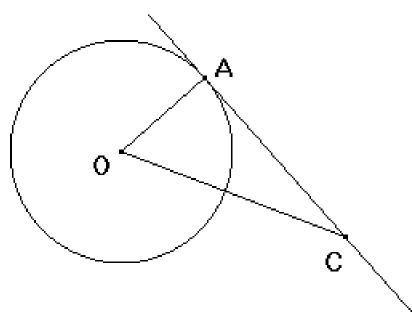
$\overline{AB} = 10\text{cm}$

$\overline{BC} = 14\text{cm}$

$\hat{A} = 120°$



<u>cas n°2</u> : la droite AC est tangente au cercle de centre O au point A.



<u>Réponses</u> :

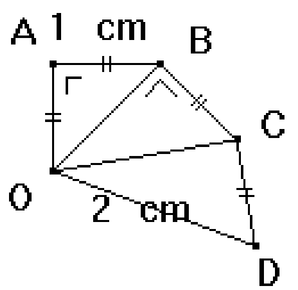
<u>cas 1</u> : On ne peut pas écrire l'égalité de Pythagore $\boxed{1\text{ pt}}$ car le triangle ABC, qui a angle obtu, n'est pas un triangle rectangle $\boxed{2\text{ pts}}$.

<u>cas 2</u> : $\overline{OC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AC}^2$ $\boxed{1\text{ pt}}$

Il est en effet possible d'écrire l'égalité de Pythagore pour le triangle AOC car la droite AC étant tangente au cercle de centre O en A, le rayon [OA] et la droite AC sont donc perpendiculaires. $\boxed{2\text{ pts}}$

II. $\boxed{7 \text{ pts}}$

Sur la figure ci-dessous, on sait que $\overline{AB} = 1\text{cm}$; $\overline{OD} = 2\text{cm}$.
En utilisant les données de la figure, déterminer si le triangle OCD est rectangle.



<u>Réponse</u> :

$\underline{\Delta\, \text{ABO} - \text{Pyth :}}$ $\overline{OB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AB}^2$

$\boxed{2}$

$$\overline{OB}^2 = 1^2 + 1^2$$
$$\overline{OB}^2 = 2$$
$$\overline{OB} = \sqrt{2}\text{cm}$$

$\underline{\Delta\, \text{BOC} - \text{Pyth :}}$ $\overline{OC}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{BC}^2$

$\boxed{2}$

$$\overline{OC}^2 = 2 + 1^2$$
$$\overline{OC}^2 = 3$$
$$\overline{OC} = \sqrt{3}\text{cm}$$

$\underline{\Delta\, \text{CDO} - \text{Réci. Pyth :}}$ d'une part, $\overline{OD}^2 = 2^2 = 4\text{cm}$,

d'autre part, $\overline{OC}^2 + \overline{DC}^2 = 3 + 1 = 4\text{cm}$

$\boxed{3}$

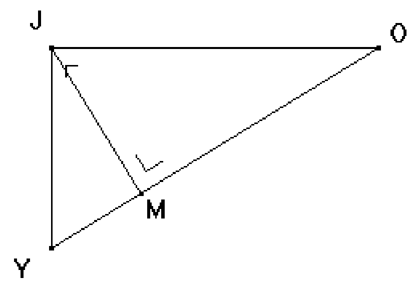
On constate que $\overline{OD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{DC}^2$.

Or, si dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés,

alors, ce triangle est rectangle.

Donc le triangle CDO est rectangle en C.

III. Sur la figure suivante, JOY est un triangle rectangle en J. Sa hauteur relative à l'hypoténuse coupe celle-ci en M. On sait que $\overline{YM} = 4\text{cm}$ et que $\overline{MO} = 6\text{cm}$.
Calculer $\overline{YO}$, $\overline{JM}$ et $\overline{OJ}$.



Réponse :

1 pt $\overline{YO} = \overline{YM} + \overline{MO} = 4 + 6 = 10\,\text{cm}$

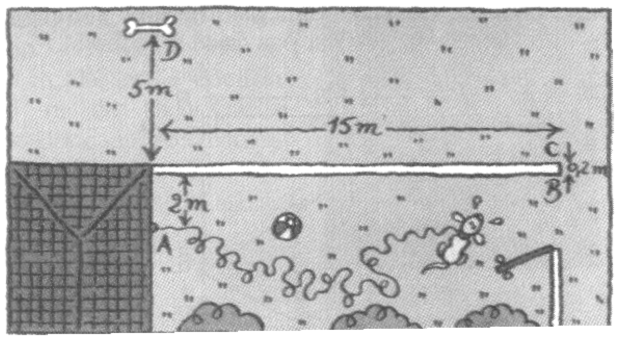
Δ JOY – hauteur :

$$\overline{JM}^2 = \overline{YM} \cdot \overline{MO}$$
$$\overline{JM}^2 = 4 \cdot 6$$
2
$$\overline{JM}^2 = 24$$
$$\overline{JM} = \sqrt{24}$$
$$\overline{JM} = 2\sqrt{6}$$
1 pt
$$\overline{JM} \approx 4{,}9\,\text{cm}$$

Δ JOY – côté $[OJ]$:

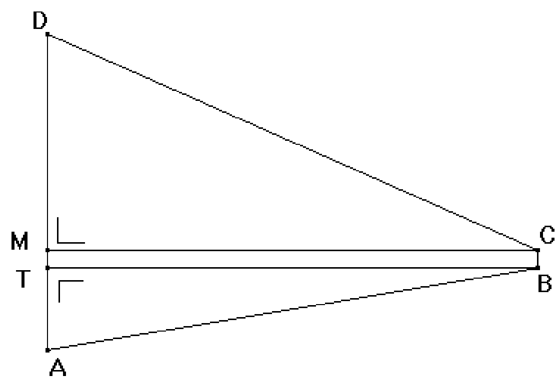
$$\overline{OJ}^2 = \overline{OY} \cdot \overline{MO}$$
$$\overline{OJ}^2 = 10 \cdot 6$$
2
$$\overline{OJ}^2 = 60$$
$$\overline{OJ} = \sqrt{60}$$
$$\overline{OJ} = 2\sqrt{15}$$
1 pt
$$\overline{OJ} \approx 7{,}7\,\text{cm}$$

IV. Melba, le chien de Julie, est attaché à une chaîne de 35m de long. Julie affirme que son chien peut atteindre l'os qui se trouve à 5m du mur à l'extérieur du jardin? Prouver qu'elle a raison. (figure, données, inconnues, calculs). On précise encore que le mur est trop haut pour que Melba puisse sauter par dessus.



<u>Réponse</u> :

3



<u>Données</u> : $\overline{DM} = 5\text{m}$

$\overline{TA} = 2\text{m}$

2

$\overline{BC} = 0{,}2\text{m}$; $\overline{MC} = 15\text{m}$

$\widehat{CMD} = 90°$; $\widehat{ATB} = 90°$

<u>thèse</u> : comparer $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ à 35m

1 pt

<u>Solution</u> :

$\underline{\Delta\, TAB - \text{Pyth :}}$ $\overline{AB}^2 = \overline{TA}^2 + \overline{TB}^2$

2

$$\overline{AB}^2 = 2^2 + 15^2$$
$$\overline{AB}^2 = 4 + 225$$
$$\overline{AB}^2 = 229$$
$$\overline{AB} = \sqrt{229}\ \text{m} \approx 15{,}13\text{m}$$

$\underline{\Delta\, MDC - \text{Pyth :}}$ $\overline{DC}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{MC}^2$

2

$$\overline{DC}^2 = 5^2 + 15^2$$
$$\overline{DC}^2 = 25 + 225$$
$$\overline{DC}^2 = 250$$

$$\overline{DC} = \sqrt{250}\ \text{m} \approx 15{,}81\text{m}$$

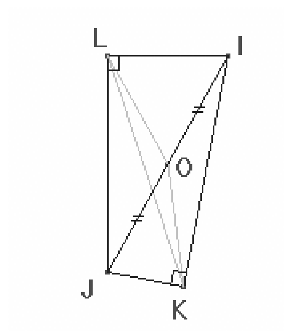
1 pt	$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \sqrt{229} + 0{,}2 + \sqrt{250} \approx 31{,}14\ \text{m} < 35\ \text{m}$
1 pt	Le chien pourra donc bien atteindre l'os.

V. a) Tracer un triangle ILJ rectangle en L.
Placer le point K tel que IJK soit aussi un triangle rectangle, en K.
Placer le point O, milieu de [IJ].
b) Quelle semble être la nature du triangle KOL?
c) Le démontrer (données, thèse et démonstration).

Réponse :

a)

3



1 pt

b) Il semble que le triangle KOL soit isocèle de sommet O.

c) Données : $\Delta\ \mathrm{ILJ}; \hat{\mathrm{L}} = 90°$

2

$\Delta\ \mathrm{IJK}; \hat{\mathrm{K}} = 90°$

$\mathrm{O} = \mathrm{mil}[\mathrm{IJ}]$

1 pt

Thèse : nature du triangle KOL

Démonstration :

- On sait que le triangle ILJ est rectangle en L et que O est le milieu de son hypoténuse.
  Or, si un triangle est rectangle
  alors la médiane relative à son hypoténuse mesure la moitié de cette hypoténuse,
  Donc $\overline{\mathrm{OL}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{IJ}} = \overline{\mathrm{OJ}} = \overline{\mathrm{OI}}$

7

- On établit de même dans le triangle IJK que $\overline{\mathrm{OK}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{IJ}} = \overline{\mathrm{OJ}} = \overline{\mathrm{OI}}$.
- Dès lors, on en déduit que $\overline{\mathrm{OK}} = \overline{\mathrm{OL}}$.
  Or, si dans un triangle, deux côtés ont la même mesure
  alors, ce triangle est isocèle
  Donc le triangle KOL est isocèle de sommet O.

VI. Calculer les expressions suivantes (réponses formelles) :

$$A = \left(2\sqrt{5}\right)^2 + \sqrt{5^6} - 3\sqrt{(-5)^2}$$

4

$$= 4 \cdot 5 + 5^3 - 3 \cdot 5$$
$$= 5 + 125$$
$$= 130$$

$$B = \sqrt{72} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{6}$$

3

$$= \sqrt{3 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 3 \cdot 2}$$
$$= 3 \cdot 24 \cdot \sqrt{2}$$
$$= 72\sqrt{2}$$

$$C = \left(\sqrt{6} - \sqrt{16}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{16}\right)$$

3

$$= \left(\sqrt{6} - 4\right)\left(\sqrt{6} + 4\right)$$
$$= \left(\sqrt{6}\right)^2 - 4^2$$
$$= 6 - 16$$
$$= -10$$

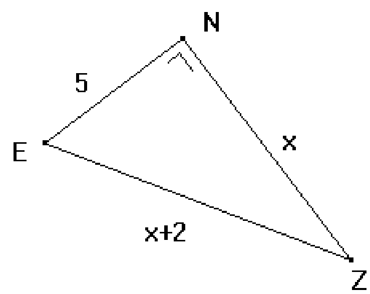
$$D = \left(\sqrt{15} + 3\sqrt{20}\right)^2$$

4

$$= \left(\sqrt{15}\right)^2 + 2\sqrt{15} \cdot 3 \cdot \sqrt{20} + \left(3\sqrt{20}\right)^2$$
$$= 15 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5} + 9 \cdot 20$$
$$= 15 + 6 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + 180$$
$$= 195 + 60\sqrt{3}$$

BONUS 4

Sur la figure ci-dessous, le triangle NEZ est rectangle en N. Les mesures de ses côtés sont données en centimètre. Quelle est la valeur de x?



Réponse :

$\underline{\Delta\ \mathrm{NEZ} - \mathrm{Pyth}:}\ \overline{EZ}^2 = \overline{NE}^2 + \overline{NZ}^2$

$(x+2)^2 = 5^2 + x^2$

3 pts

$x^2 + 4x + 4 = 25 + x^2$

$4x = 21$

$x = \dfrac{21}{4}$

1 pt

On peut donc dire que x mesure $5{,}25\ \mathrm{cm}$.