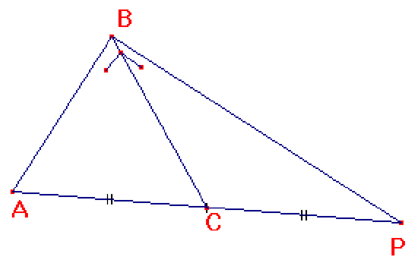
Devoir en commun en Ve : Épreuve préliminaire

Corrigé-modèle

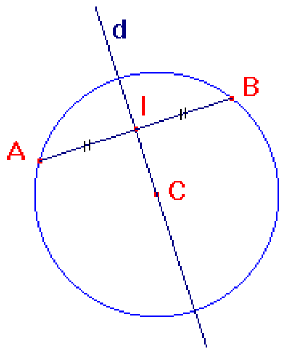
Question I

Dans chacun des cas suivants, peut-on calculer $\overline{BC}$ en utilisant le théorème de Pythagore? Justifier brièvement.

1)



2)



Solution

1) Il impossible de calculer $\overline{BC}$ en utilisant le théorème de Pythagore car [BC] n'est côté d'aucun triangle rectangle sur la figure.

1 pt
2 pts

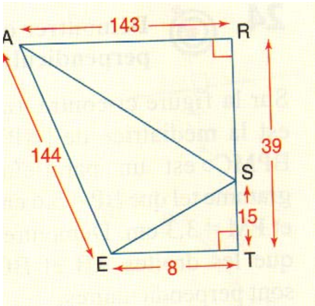
2) Il est possible de calculer $\overline{BC}$ en utilisant le théorème de Pythagore car la droite IC passant par deux points équidistants de A et de B, à savoir le milieu de [AB] et le centre du cercle, c'est la médiatrice du segment [AB] et par conséquent, l'angle $\widehat{BIC}$ est un angle droit.

1 pt
2 pts

Le diamètre passant par le milieu d'une corde d'un cercle est perpendiculaire à cette corde

Question II

En utilisant les données de la figure ci-dessous, déterminer si le triangle ASE est rectangle. Toutes les mesures sont données dans la même unité; la calculatrice peut être utilisée.



Solution

$\Delta RAS - \text{Pyth}:$

$$\overline{AS}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RS}^2$$
$$\overline{AS}^2 = 143^2 + (39-15)^2$$
$$\overline{AS}^2 = 20449 + 576$$
$$\overline{AS}^2 = 21025$$
$$\overline{AS} = 145$$

3 pts

$\Delta TSE - \text{Pyth}:$

$$\overline{SE}^2 = \overline{ET}^2 + \overline{ST}^2$$
$$\overline{SE}^2 = 8^2 + 15^2$$
$$\overline{SE}^2 = 64 + 225$$
$$\overline{SE}^2 = 289$$
$$\overline{SE} = 17$$

3 pts

$\Delta ASE - \text{Récip.Pyth}:$ D'une part, $\overline{AE}^2 + \overline{ES}^2 = 144^2 + 17^2 = 20736 + 289 = 21025$

D'autre part, $\overline{AS}^2 = 21025$

On constate que $\overline{AE}^2 + \overline{ES}^2 = \overline{AS}^2$.

Or, si dans un triangle, la somme des carrés des mesures de deux côtés est égale au carré de la mesure du troisième côté,

alors, ce triangle est rectangle.

Donc AES est un triangle rectangle.

4 pts

Question III

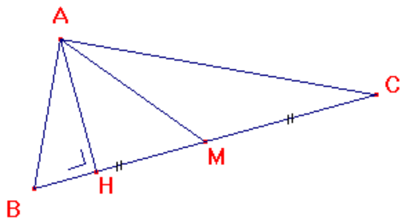
Dans un triangle ABC rectangle en A, la hauteur issue de A coupe [BC] en H et la médiane issue de A coupe [BC] en M. On sait que $\overline{AM} = 3\text{cm}$ et que $\overline{AB} = \sqrt{11}\text{cm}$.

a) Faire une figure.
b) Écrire les données.
c) Calculer la longueur du segment [BC].
d) Calculer la longueur du segment [BH].
e) Calculer la longueur du segment [HC].
f) Calculer la longueur du segment [AH].

On donnera les réponses au dixième d'unité près.

Solution

a) Figure



2pts

b) Données

$\Delta ABC\,;\ \hat{A} = 90°$

$H \in (BC); (AH) \perp (BC)$

$M = \text{mil}[BC]$

$\overline{AM} = 3\text{cm}\,;\ \overline{AC} = 5\text{cm}$

3 pts

c) $\underline{\Delta ABC - \text{médiane}}$: $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AM}$

$\overline{BC} = 2 \cdot 3$

$\overline{BC} = 6\text{cm}$

2 pts

d) $\underline{\Delta ABC - \text{côté}[AB]}$: $\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC}$

$11 = \overline{BH} \cdot 6$

$\overline{BH} = \frac{11}{6} \approx 1{,}8\text{cm}$

3 pts

e) $\overline{HC} = \overline{BC} - \overline{BH} = 6 - \frac{11}{6} = \frac{25}{6} \approx 4{,}2\text{cm}$

1 pt

f) $\underline{\Delta ABC - \text{hauteur}}$: $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$

$\overline{AH}^2 = \frac{11}{6} \cdot \frac{25}{6}$

$\overline{AH} = \frac{5}{6}\sqrt{11} \approx 2{,}8\text{cm}$

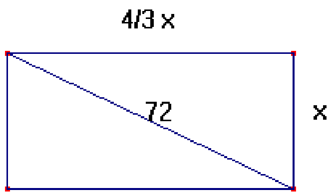
3 pts

Question IV

Quelles sont les dimensions d'un écran de télévision de type $4/3$ dont la diagonale mesure 72cm?

Solution

Figure



2 pts

Calculs

6 pts

Désignons par x la largeur de l'écran. Sa longueur mesure donc $\frac{4}{3}x$.

Par application du théorème de Pythagore à l'un des triangles rectangles déterminés par la diagonale du rectangle, on a :

$$x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = 72^2$$

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 72^2$$

$$\frac{25}{9}x^2 = 72^2$$

$$x^2 = \frac{3^2}{5^2} \cdot 72^2$$

$$x = \sqrt{\frac{3^2}{5^2} \cdot 72^2}$$

$$x = \frac{3}{5} \cdot 72$$

$$x \approx 43{,}2\text{cm}$$

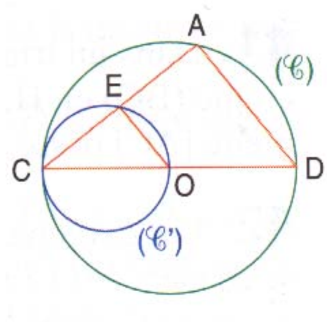
Dès lors, $\frac{4}{3}x = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot 72 = \frac{4}{5} \cdot 72 \approx 57{,}6\text{cm}$

Au centimètre près, les dimensions de l'écran sont donc 43cm de largeur et 58cm de longueur.

Question V

Voici un énoncé :

"Soit (C) un cercle de diamètre [CD] et de centre O, et (C') le cercle de diamètre [CO]. Soit A un point de (C). La droite CA coupe (C') en E. Démontrer que les droites OE et AD sont parallèles."



a) Écrire les données.
b) Écrire la thèse.
c) Rédiger la démonstration.

Solution :

Données

cercle (C) de centre O et de diamètre [CD].

cercle (C') de diamètre [CO].

$\mathrm{A} \in (\mathrm{C})$

$\mathrm{CA} \cap (\mathrm{C}\,') = \{\mathrm{E}\}$

2 pts

Thèse : $\mathrm{OE} \,//\, \mathrm{AD}$

Démonstration

4 pts

On sait que $\begin{cases} [\mathrm{CD}] \text{ est un diamètre de } (\mathcal{C}) \text{ et que } \mathrm{A} \in (\mathcal{C}) \\ [\mathrm{CO}] \text{ est un diamètre de } (\mathcal{C}\,') \text{ et que } \mathrm{A} \in (\mathcal{C}\,') \end{cases}$.

Or, si un côté d'un triangle inscrit à un cercle est un diamètre de ce cercle alors, ce triangle est rectangle et l'angle opposé au diamètre est droit.

Donc $\begin{cases} \mathrm{ADC} \text{ est rectangle en A} \\ \mathrm{EOC} \text{ est rectangle en E} \end{cases}$

ou encore $\begin{cases} \mathrm{AD} \perp \mathrm{AC} \\ \mathrm{EO} \perp \mathrm{EC} \end{cases}$.

On a établi que $\mathrm{AD} \perp \mathrm{AC}$ et que $\mathrm{EO} \perp \mathrm{EC}$,

c'est-à-dire que $\mathrm{AD} \perp \mathrm{AC}$ et que $\mathrm{EO} \perp \mathrm{AC}$.

4 pts

Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors, elles sont parallèles entre elles.

Donc $\mathrm{AD} \,//\, \mathrm{EO}$.

Question VI : Simplifier (réponses formelles)

$$A = \sqrt{12} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{27}$$
$$B = \sqrt{48} \cdot \sqrt{30} \cdot \sqrt{50}$$
$$C = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$
$$D = \left(\sqrt{\frac{1}{15}} + 2\sqrt{3}\right)^2$$

Solution :

pts : 3 + 3 + 2 + 4

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{12} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{27} \\ &= 2\sqrt{3} + 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} + 12\sqrt{3} \\ &= 14\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{16 \cdot 3} \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \sqrt{25 \cdot 2} \\ &= 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5} \cdot 5\sqrt{2} \\ &= 20\sqrt{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2} \\ &= 20 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{5} \\ &= 120\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \\ &= \left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 6 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \left(\sqrt{\frac{1}{15}} + 2\sqrt{3}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{\frac{1}{15}}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{15}} \cdot 2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{15} + 4\sqrt{\frac{3}{15}} + 12 \\ &= \frac{1 + 180}{15} + 4\sqrt{\frac{1}{5}} \\ &= \frac{181}{15} + 4\sqrt{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

Répartition : 6 + 10 + 14 + 8 + 10 + 12