Exercice 1

(1) $\text{ppcm}(a, \text{ppcm}(b,c)) = \text{ppcm}(\text{ppcm}(a,b), c) = \text{ppcm}(a,b,c)$.

$15 = 3 \cdot 5$, $18 = 2 \cdot 3^2$ et $20 = 2^2 \cdot 5$. Donc :

- $\text{ppcm}(15,18,20) = \text{ppcm}(\text{ppcm}(15,18),20) = \text{ppcm}(90,20) = 180$
- $\text{ppcm}(15,18,20) = \text{ppcm}(15, \text{ppcm}(18,20)) = \text{ppcm}(15,180) = 180$
- $\text{ppcm}(15,18,20) = \text{ppcm}(18, \text{ppcm}(15,20)) = \text{ppcm}(18,60) = 180$

(2) $\text{pgcd}(a,b) \cdot \text{ppcm}(a,b) = a \cdot b$

(3) Si a et b sont premiers entre eux, alors $\text{pgcd}(a,b) = 1$ et $\text{ppcm}(a,b) = a \cdot b$.

(4) Si un naturel est un multiple commun de deux naturels a et b alors il est un multiple de $\text{ppcm}(a,b)$. Si un naturel est un diviseur commun de deux naturels a et b, alors il est un diviseur de $\text{pgcd}(a,b)$.

(5) $54 = 18 \cdot 3$, $72 = 18 \cdot 4$ et 3 et 4 sont premiers entre eux. Donc $\text{ppcm}(54, 72) = 18 \cdot 3 \cdot 4 = 18 \cdot 12 = 216$.

Exercice 2

(1) Les nombres cherchés sont de la forme $a = 12 \cdot q + 5,\ 0 \leq 5 < 12$. On veut avoir $40 < a < 80$. La plus petite solution correspond à $q = 3$: alors $a = 41$. Voici la liste de toutes les solutions :

- $q = 3 \Rightarrow a = 41$
- $q = 4 \Rightarrow a = 53$
- $q = 5 \Rightarrow a = 65$
- $q = 6 \Rightarrow a = 77$

(2) Les nombres cherchés sont de la forme $a = 5 \cdot q + r,\ 0 \leq r < 5$ avec $q = 3r$. Donc : $a = 5 \cdot (3r) + r = 15r + r = 16r,\ 0 \leq r < 5$. Voici la liste des solutions :

- $r = 0 \Rightarrow a = 0$
- $r = 1 \Rightarrow a = 16$
- $r = 2 \Rightarrow a = 32$
- $r = 3 \Rightarrow a = 48$
- $r = 4 \Rightarrow a = 64$

(3) Soit x le plus grand des deux nombres cherchés et y le plus petit. On a :

$$\begin{cases} x - y = 249 & (1) \\ x = y \cdot 20 + 2,\ 0 \leq 2 < y & (2) \end{cases}$$

On remplace (2) dans (1) :

$$\begin{aligned} & y \cdot 20 + 2 - y = 249 \\ \Leftrightarrow\ & 20y - y = 249 - 2 \\ \Leftrightarrow\ & 19y = 247 \\ \Leftrightarrow\ & y = 247 : 19 = 13 \end{aligned}$$

Donc : $y = 13$ et $x = 249 + 13 = 262$.

Exercice 3

(1) $336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$, $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, $196 = 2^2 \cdot 7^2$.

Donc :

$$\mathrm{ppcm}(336,168,196) = 2^4 \cdot 3 \cdot 7^2 = 336 \cdot 7 = 2352$$

et

$$\mathrm{pgcd}(336,168,196) = 2^2 \cdot 7 = 28 \,.$$

(2) $\mathrm{ppcm}(3,6,9,12,15,18) = \mathrm{ppcm}(12,15,18)$ d'après l'associativité du ppcm, car $\mathrm{ppcm}(3,6,9,18) = 18$. Or $12 = 2^2 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$ et $18 = 2 \cdot 3^2$. Donc : $\mathrm{ppcm}(12,15,18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$. $\mathrm{pgcd}(3,6,9,12,15,18) = 3$ car tous les nombres sont divisibles par 3.

G. Lorang