6C1 Corrigé du devoir de mathématiques I,3 3.12.03

Exercice 1 — 18 (=12+6) points

(1)
$$\begin{aligned}
\text{pgcd}(7007{,}13013) &= \text{pgcd}(1001\cdot 7{,}1001\cdot 13)\\
&= 1001\cdot \text{pgcd}(7{,}13)\\
&= 1001\\
\text{ppcm}(7007{,}13013) &= \text{ppcm}(1001\cdot 7{,}1001\cdot 13)\\
&= 1001\cdot \text{ppcm}(7{,}13)\\
&= 1001\cdot 7\cdot 13\\
&= 91091
\end{aligned}$$

pgcd $(7{,}13) = 1$ et ppcm $(7{,}13) = 7\cdot 13$ puisque 7 et 13 sont premiers entre eux.

(1) a) $\dfrac{7007}{13013}+\dfrac{13013}{7007}=\dfrac{7}{13}+\dfrac{13}{7}=\dfrac{49}{91}+\dfrac{169}{91}=\dfrac{218}{91}$

b) $\dfrac{2}{13013}-\dfrac{1}{7007}=\dfrac{14}{91091}-\dfrac{13}{91091}=\dfrac{1}{91091}$

Exercice 2 — 20 (=8+6+6) points

(1) $2003 = 12\cdot 166 + 11,\ 0 \le 11 < 12$

a) Si l'on ajoute 5 au dividende, le reste augmente aussi de 5. Mais ceci est impossible, car le nouveau reste serait 16 et donc plus grand que 12. On ajoute donc 1 au quotient et le reste devient 4 :

$$2008 = 12\cdot 167 + 4,\ 0 \le 4 < 12$$

b) Il suffit de retrancher 3 au dividende et au reste :

$$2000 = 12\cdot 166 + 8,\ 0 \le 8 < 12$$

c) Le diviseur est multiplié par 2, donc le quotient est divisé par 2 et le reste ne change pas :

$$2003 = 24\cdot 83 + 11,\ 0 \le 11 < 24$$

(2) $2003 = 41\cdot 48 + 35,\ 0 \le 35 < 41$

a) Le plus petit entier qu'on doit ajouter au dividende pour que le quotient augmente de 1 est 6 : la division est alors exacte.

$$2009 = 41\cdot 49$$

b) Le plus petit entier qu'on doit retrancher du dividende pour que le quotient diminue de 1 est 36 :

$$1967 = 41\cdot 47 + 40,\ 0 \le 40 < 41$$

(3) $2003 = 75\cdot 26 + 53,\ 0 \le 53 < 75\,.$

a) Le plus petit entier qu'on doit ajouter au dividende pour que le reste soit égal à 60 est 7 :

$$2010 = 75\cdot 26 + 60,\ 0 \le 60 < 75$$

b) Le plus petit entier qu'on doit ajouter au dividende pour que le reste soit égal à 10 est $22 + 10 = 32$:

$$2035 = 75 \cdot 27 + 10,\ 0 \leq 10 < 75$$

Exercice 3

(1) Les entiers cherchés sont de la forme :

$$a = 5q + r, 0 \leq r < 5 \text{ avec } q = 2r$$
$$\Leftrightarrow a = 5 \cdot 2r + r,\ 0 \leq r < 5$$
$$\Leftrightarrow a = 10r + r,\ 0 \leq r < 5$$
$$\Leftrightarrow a = 11r,\ 0 \leq r < 5$$

Donc, il y a 5 solutions : 0, 11, 22, 33 et 44.

(2) Les entiers cherchés sont de la forme :

$$a = 5q + r,\ 0 \leq r < 5 \text{ avec } r = 2q$$
$$\Leftrightarrow a = 5q + 2q,\ 0 \leq 2q < 5$$
$$\Leftrightarrow a = 7q,\ 0 \leq 2q < 5$$

Donc, il y a 3 solutions, correspondant à $q = 0,\ q = 1$ ou $q = 2$: 0, 7 et 14.

Exercice 4

(1) $x = 7m + 4,\ 0 \leq 4 < 7$

$y = 7n + 6,\ 0 \leq 6 < 7$

(2) On a :

$$\begin{aligned} x + y &= 7m + 4 + 7n + 6 \\ &= 7(m + n) + 10 \\ &= 7(m + n) + 7 + 3 \\ &= 7(m + n + 1) + 3,\ 0 \leq 3 < 7 \end{aligned}$$

Le quotient de cette division est $m + n + 1$, le reste est 3.

(3) On a :

$$\begin{aligned} 2x &= 2(7m + 4) \\ &= 14m + 8 \\ &= 7 \cdot 2m + 7 + 1 \\ &= 7(2m + 1) + 1,\ 0 \leq 1 < 7 \end{aligned}$$

Le quotient de cette division est $2m + 1$, le reste est 1.

G. Lorang