

Durée : 55'

Calculatrice non autorisée

Question 1

10 (=4+6) points

Calculer et mettre sous forme de *fraction irréductible* :

$$(1) \frac{\frac{2^2}{5} - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{-(-0,3)^2}$$

$$= \frac{\frac{4}{5} - \frac{1}{4}}{-0,09}$$

$$= \frac{\frac{16}{20} - \frac{5}{20}}{-\frac{9}{100}}$$

$$= -\frac{\frac{11}{20} \cdot \frac{100}{9}}{1} = -\frac{55}{9}$$

$$(2) \frac{4}{5 \cdot 0,5^2 - \frac{5}{3}} - 3,6 \cdot \frac{5}{(-3)^2}$$

$$= \frac{4}{5 \cdot 0,25 - \frac{5}{3}} - \frac{\frac{4^2}{36} \cdot \frac{5}{9}}{\frac{1}{1}}$$

$$= \frac{4}{5 \cdot \frac{1}{4} - \frac{5}{3}} - 2$$

$$= \frac{4}{\frac{15}{12} - \frac{20}{12}} - 2$$

$$= \frac{4}{-\frac{5}{12}} - 2 = -\frac{48}{5} - 2 = -\frac{58}{5}$$

Question 2

15 (=1+2+3+6+3) points

- (1) Compléter par une **puissance de 10** : un milliard de billions = $10^9 \cdot 10^{12} = 10^{21}$
- (2) Sachant que $7^8 = 5'764'801$, calculer 7^7 ! **Réponse** : $823'543$
- (3) Ecrire ci-dessous les **formules** suivantes (**sans exemples** !):

a) Puissance d'un produit

b) Quotient de puissances de même base

| | |
|------------------------------------|---|
| a) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ | b) |
| | $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m \geq n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{si } m < n \end{cases}$ |

- (4) Calculer et compléter par des **fractions irréductibles** :

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------------------------|----|----------------|----------------|-----------------|------------------|-------------------|
| $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ | 1 | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{9}{4}$ | $-\frac{27}{8}$ | $\frac{81}{16}$ | $-\frac{243}{32}$ |
| $-\left(\frac{3}{2}\right)^n$ | -1 | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{9}{4}$ | $-\frac{27}{8}$ | $-\frac{81}{16}$ | $-\frac{243}{32}$ |

- (5) Calculer le nombre suivant (avec calculs détaillés) et montrer pourquoi il est **amusant** à l'aide d'une couleur: $A = (-4)^4 + (-4)^6 + (-4)^2 + (-4)^4$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|---|-----|------|---|---|-------|----|-----|------|------|--|----|--|------|--|-----|--|------|--|
| $A = 4^4 + 4^6 + 4^2 + 4^4$ $= 256 + 4096 + 16 + 256$ $= 4624$ | <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">n</td> <td style="padding: 5px;">2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">4</td> <td style="padding: 5px;">6</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">4^n</td> <td style="padding: 5px;">16</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">256</td> <td style="padding: 5px;">4096</td> </tr> </table> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right; padding-right: 5px;">256.</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; padding-right: 5px;">16</td> <td style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; padding-right: 5px;">1536</td> <td style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; padding-right: 5px;">256</td> <td style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="text-align: right; padding-right: 5px;">4096</td> <td style="border-top: 1px solid black;"></td> </tr> </table> | n | 2 | 4 | 6 | 4^n | 16 | 256 | 4096 | 256. | | 16 | | 1536 | | 256 | | 4096 | |
| n | 2 | 4 | 6 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4^n | 16 | 256 | 4096 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 256. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1536 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 256 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4096 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Question 3

4 points

Quel est le **signe** (>0 ou <0) des nombres suivants (*sans les calculer*):

(1) $-3^{16} \cdot 15^0 \dots < 0$

(5) $(-5)^3 \cdot 8^4 : (-1000) \dots > 0$

(2) $(-7^6) \cdot (-5)^8 \dots < 0$

(6) $-\frac{(-3)^6}{-9^4} \dots > 0$

(3) $(-2)^7 : (-5^6) \dots > 0$

(4) $(-8^3)^4 \dots > 0$

Question 4

18 points

Calculer ou écrire aussi simplement que possible en utilisant les formules sur les puissances :

(1) $\frac{6^7}{2^9 \cdot 3^5} = \frac{(2 \cdot 3)^7}{2^9 \cdot 3^5} = \frac{2^7 \cdot 3^7}{2^9 \cdot 3^5} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

(2) $3^5 \cdot (-9)^6 = 3^5 \cdot 9^6 = 3^5 \cdot (3^2)^6 = 3^5 \cdot 3^{12} = 3^{17}$

(3) $(6^n)^2 \cdot (6^3)^n = 6^{2n} \cdot 6^{3n} = 6^{5n}$

(4) $2^7 \cdot 5^{10} = 2^7 \cdot 5^7 \cdot 5^3 = 10^7 \cdot 5^3 = 1250 \cdot 000 \cdot 000$

(5) $-2x^3 \cdot (-2x)^3 = -2x^3 \cdot (-8) \cdot x^3 = 16x^6$

(6) $\frac{32 \cdot x^2 (2y)^5}{2^7 \cdot (xy)^6 (-y)^3}$

| | |
|---|--|
| = | $\frac{2^5 \cdot x^2 \cdot 2^5 \cdot y^5}{2^7 \cdot x^6 y^6 \cdot (-y)^3}$ |
| = | $-\frac{2^{10} \cdot x^2 \cdot y^5}{2^7 \cdot x^6 \cdot y^9}$ |
| = | $-\frac{2^3}{x^4 \cdot y^4}$ |
| = | $-\frac{8}{x^4 y^4}$ |

Question 5

13 (=4+8+1) points

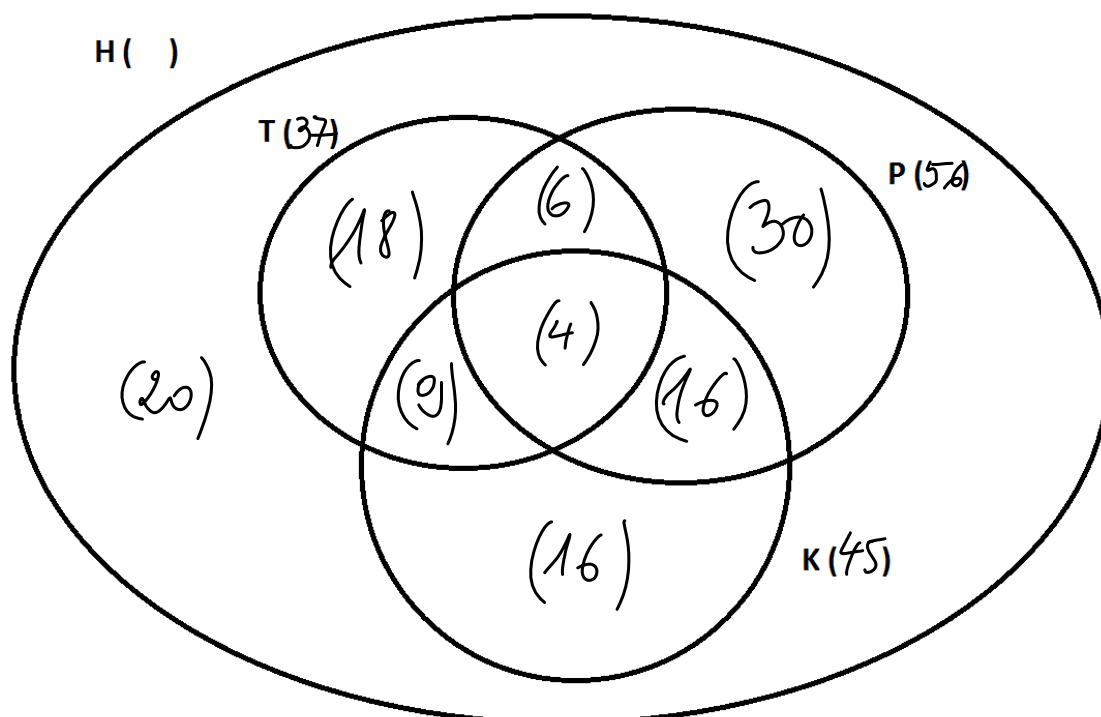
Dans la rue Courte, **37** habitants font du tennis, **56** de la pelote basque et **45** du kayak. On note H l'ensemble des habitants de cette rue, T le sous-ensemble des habitants qui font du tennis, P le sous-ensemble des habitants qui font de la pelote basque et K le sous-ensemble des habitants qui font du kayak. On sait que :

- **20** habitants ne font aucun de ces trois sports,
- **4** font les trois sports,
- **6** font seulement du tennis et de la pelote basque,
- **20** font du kayak et de la pelote basque,
- **18** ne font que du tennis.

- (1) Traduire les 5 nombres rouges en termes de cardinaux d'ensembles à préciser (en utilisant les opérations sur les ensembles H, T, P et K)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| • | $\text{card} (H - (T \cup P \cup K)) = 20$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| • | $\text{card} (T \cap P \cap K) = 4$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| • | $\text{card} ((T \cap P) \setminus K) = 6$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| • | $\text{card} (K \cap P) = 20$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| • | $\text{card} (T \setminus (P \cup K)) = 18$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

- (2) Compléter les cardinaux de toutes les régions du diagramme de Venn ci-dessous (*on ne demande pas de préciser les calculs*).



- (3) Quel est le nombre d'habitants de la rue Courte ? $\text{card } H = 56 + 18 + 9 + 16 + 20 = 119$