

**Devoir de mathématiques**  
**1B**  
**14 novembre 2008**

*Durée de l'épreuve : 90 minutes*

*La clarté des raisonnements, la qualité de la rédaction ainsi que la propreté de la copie interviendront dans l'appréciation.*

*3 points pour une copie propre et lisible!*

**1<sup>ère</sup> question:**

a) Mettre les nombres suivants sous forme trigonométrique :

$$z_1 = \left( \frac{-i + \sqrt{3}}{1+i} \right)^{1992} ;$$

$$z_2 = -(1 + \sqrt{3})i ;$$

$$z_3 = 1 - \sqrt{2} ;$$

$$z_4 = -\frac{2(\cos \alpha - i \sin \alpha)^2}{(\sin 3\alpha + i \cos 3\alpha)}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

b) Soit  $z = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ . Calculer  $z^2$ , puis  $z^4$ . En déduire les

formes algébriques des racines 4<sup>e</sup> du nombre complexe  $Z = 128 + 128i\sqrt{3}$ .

c) Déterminer le module et un argument du nombre complexe  $u = -3 + 3i$ .

Déterminer ensuite le nombre complexe  $z$  défini par  $u \cdot z = \sqrt{2} \operatorname{cis} \left( \frac{17\pi}{12} \right)$ .

(Mettre  $z$  sous f.t. et sous f.a. .)

En déduire les valeurs exactes de  $\cos \frac{17\pi}{12}$  et de  $\sin \frac{17\pi}{12}$ .

d) Comment faut-il choisir  $z$  afin que  $u = \frac{z+1}{z-1}$  soit réel ?

[9+6+7+6 = 28 pts]

**Tourner S.V.P.**

**2<sup>e</sup> question:**

1) Quelle est l'affixe  $z'$  du point  $M'$ , image du point  $M$  d'affixe  $2 - 2i$  par

a) la rotation  $R_{O, -\frac{2\pi}{3}}$  de centre  $O$  et d'angle  $-\frac{2\pi}{3}$ ;

b) la transformation  $R_{O, \frac{3\pi}{4}} \circ h_{O,3}$

( $R_{O, \frac{3\pi}{4}}$  désigne la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{3\pi}{4}$  et  $h_{O,3}$  l'homothétie de centre  $O$  et de rapport 3).

2) Voici les expressions analytiques complexes de trois transformations géométriques du plan:

$$T_1: \quad z' = z - 2 + i$$

$$T_2: \quad z' = \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \cdot z$$

$$T_3: \quad z' = -2i \cdot z.$$

Caractérise ces transformations.

[6+6= 12 pts]

**3<sup>e</sup> question:**

Dans le plan de Gauß on considère les points  $A(-2 + 3i)$ ,  $B(4 + i)$ ,  $C(10 + 5i)$ ,  $D(3 + bi)$  où  $b$  est un nombre réel.

*Dans toute la suite de l'exercice on utilisera exclusivement les affixes des points pour effectuer les calculs!*

a) Calculer l'angle orienté  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$  (donner la mesure principale en degré, à  $10^{-2}$  près).

b) Déterminer  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $AD \perp DC$ .

c) Déterminer  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $A$ ,  $C$  et  $D$  sont alignés.

d) Faire une figure (unité = 1 cm).

[6+7+2+2= 17 pts]