

# CHAPITRE I

## ENSEMBLES

1) Ecrivez les ensembles suivants en extension (par énumération) :

$$A = \{x / x \text{ est une lettre du mot "MATHEMATIQUES"}\}$$

$$B = \{x / x \text{ est un entier et } 12 \leq x < 17\}$$

$$C = \{x / x \text{ est un entier impair et } 23 < x \leq 34\}$$

$$D = \{x / x \text{ est un entier et } \frac{5}{3} \leq x \leq \frac{47}{7}\}$$

$$E = \{x / x \text{ est un entier et } -7 < x < 2\}$$

$$F = \{x / x \text{ est un entier positif et } x + 5 < 11\}$$

$$G = \{x / 3x - 5 = 16\}$$

$$H = \{x / x \text{ est un continent dont la première lettre est un "A"}\}$$

$$I = \{x / x \text{ est un nombre naturel qui divise } 24\}$$

$$J = \{x / x \text{ est un entier négatif et } x + 8 > 3\}$$

$$K = \{x \text{ est un nombre naturel à deux chiffres qui se termine par } 3\}$$

$$L = \{x / x \text{ est une lettre du mot "marmotte"}\}$$

$$M = \{x / x \text{ est un entier naturel pair et } x < 7\}$$

$$N = \{x / x \text{ est un entier positif et } 12 - 3x > 0\}$$

$$O = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ et } 4 < x \leq 10\}$$

$$P = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ et } x - 3 < 13\}$$

$$Q = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ et } 2x - 13 \leq 0\}$$

$$R = \{x / x \text{ est une lettre du mot "ABRACADABRA"}\}$$

$$S = \{x / x \text{ est un entier divisible par } 3 \text{ et } -\frac{16}{5} \leq x < \frac{89}{9}\}$$

2) Ecrivez les ensembles suivants en compréhension :

$$A = \{6; 8; 10; 12; 14; 16; 18\}$$

$$E = \{27, 29, 31, 33, 35, 37, 39\}$$

$$B = \{C; E; I; R; X\}$$

$$F = \{B, E, L, M, N, S\}$$

$$C = \{41; 43; 45; 47; 49; 51; 53\}$$

$$G = \{7, 9, 11, 13\}$$

$$D = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}\}$$

$$H = \{9, 27, 15, 3, 21\}$$

$$I = \{\text{février, juin, mars, janvier, avril, mai}\}$$

$$J = \{16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80\}$$

$$K = \{x / x \text{ est un homme qui pèse } 2 \text{ tonnes}\}$$

$$L = \{40, 39, 38, 36, 35, 34, 33\}$$

$$M = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

$$N = \{-\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}, -1, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}\}$$

$$P = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

3) On donne  $C = \{\frac{2}{5}; \frac{2}{7}; \frac{2}{9}; \frac{2}{11}; \frac{2}{13}\}$ .

a) Ecrivez l'ensemble  $C$  en **compréhension**.

b) Ecrivez en **extension** l'ensemble  $D = \{x / x \in C \text{ et } x < \frac{2}{9}\}$ .

4) Soit  $P = \{3; 5; 6; 9; 11\}$  et  $Q = \{1; 3; 7; 8; 10\}$ . Complétez par  $\in$ ,  $\notin$ ,  $P$  ou  $Q$  :

5... $P$	11... $Q$	8... $P$	9 $\in$ ...
1... $P$	58... $P$	3 $\in$ ...	10 $\notin$ ...

5) Déterminez  $x$  et  $y$  pour que  $I = J$  avec :

a)  $I = \{5; 2; 8; 5; 8\}$  et  $J = \{5; 8; x\}$

b)  $I = \{a; b; x; a; c\}$  et  $J = \{b; d; y; b; a\}$

c)  $I = \{19; x; y\}$  et  $J = \{25; 19; 7; 25; 19\}$

6) Dessinez un diagramme de Venn qui représente les ensembles  $M = \{2; 5; 7; 8; 9\}$  et  $N = \{3, 4, 6\}$ , puis placez les chiffres de 0 à 9 sur ce diagramme.

7) Dessinez un diagramme de Venn qui représente les deux ensembles  $A = \{2; 4; 7; 9; 13\}$  et  $B = \{1; 3; 4; 6; 7; 11\}$ .

8) Dessinez un diagramme de Venn qui représente les trois ensembles  $A = \{m; p; k; f; t; y; q\}$ ,  $B = \{d; f; g; t; o; p; q; t\}$  et  $C = \{f; e; q; m; p; r; s\}$ .

9) Soient les ensembles  $K = \{0; 5; 7\}$ ,  $L = \{4; 5; 6; 7\}$  et  $M = \{0; 2; 3; 5; 6; 7\}$ . Complétez par  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$  ou  $\not\subset$  :

$K \dots M$	$5 \dots K$	$K \dots L$	$M \dots K$
$\emptyset \dots M$	$9 \dots L$	$0 \dots \emptyset$	$L \dots M$
$\{2; 5\} \dots M$	$\{6\} \dots L$	$6 \dots L$	$\{5; 6\} \dots K$

10) Trouvez *tous* les ensembles  $X$  tel que :

a)  $X \subset \{3\}$

d)  $\{1; 2\} \subset X \subset \{1; 2; 3; 4\}$

b)  $X \subset \{4; 7\}$

e)  $X \subset \{b, c, d, e\}$  et  $X \subset \{a, b, c\}$ .

c)  $X \subset \{a; b; c\}$

f)  $X \not\subset \{b, c, d, e\}$  et  $X \subset \{a, b, c\}$ .

11) Déterminez tous les sous-ensembles des ensembles

a)  $A = \{1\}$  b)  $B = \{1, 2\}$  c)  $C = \{1, 2, 3\}$  et d)  $D = \{1, 2, 3, 4\}$

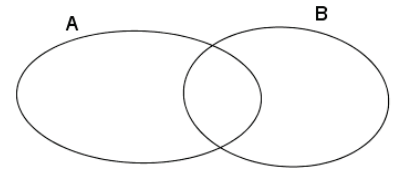
Sans les énumérer tous, combien de sous-ensembles possède  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  ?

12) Dessinez sur un même diagramme (aussi simple que possible !) les ensembles suivants :

$A = \{8; 13\}$ ,  $B = \{8; 9; 13; 24; 30\}$  et  $C = \{8; 13; 24\}$ .

13) Sur le diagramme ci-contre, hachurez *les parties vides* :

- a) si  $A \subset B$
- b) si  $B \subset A$
- c) si  $A = B$



14) Dessinez sur un même diagramme les ensembles suivants :

- a)  $E = \{d; o; p; j\}$  et  $F = \{q; m; o; t; d\}$
- b)  $P = \{4; 5; 6; 9; 12\}$ ,  $Q = \{5; 6; 7; 8; 12\}$  et  $R = \{1; 3; 4; 5; 8; 12\}$
- c)  $S = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ ,  $T = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ,  $U = \{0; 3; 4; 5; 8\}$  et  $W = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ et } x < 11\}$

15) Représentez par un seul diagramme de Venn et le plus simplement possible les ensembles :

$A = \{\text{animaux}\}$ ,  $B = \{\text{plantes}\}$ ,  $C = \{\text{légumes}\}$ ,  $D = \{\text{chiens}\}$ ,  $E = \{\text{Milou}\}$   
*(Milou est le nom du chien de Tintin)*

16) Complétez par  $\in$  ou  $\notin$  :

$745 \dots \mathbb{N}$	$\frac{6}{2} \dots \mathbb{N}$	$-9 \dots \mathbb{N}$	$-9478 \dots \mathbb{Z}$
$3, 2 \dots \mathbb{Z}$	$-\frac{21}{3} \dots \mathbb{Z}$	$27 \dots \mathbb{Z}$	$-65,07 \dots \mathbb{D}$
$\frac{7}{5} \dots \mathbb{D}$	$-47 \dots \mathbb{Q}$	$-\frac{1}{3} \dots \mathbb{D}$	$\frac{11}{13} \dots \mathbb{Q}$

17) Dessinez sur un même diagramme les ensembles  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{D}$  et les nombres :

$$\frac{22}{11}; 0; -75; \frac{3}{7}; 129; \frac{6}{3}; \frac{3}{4}; -3,81; -\frac{8}{5}; -\frac{11}{3}$$

18) Ecrivez les ensembles suivants en extension (par énumération) :

$$A = \{x / x \in \mathbb{Z} \text{ et } -3 \leq x < 5\}$$

$$B = \left\{ x / x \in \mathbb{N} \text{ et } \frac{9}{7} \leq x \leq \frac{53}{9} \right\}$$

$$C = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ et } x \leq -7\}$$

$$D = \{x / x \in \mathbb{Z} \text{ et } x \text{ est divisible par } 4 \text{ et } -20 \leq x \leq 10\}$$

19) Soient les ensembles  $A = \{1; 2; 4; 5\}$  et  $B = \{2; 3; 5; 6; 7\}$ .

- a) Diagramme de Venn.
- b) Ecrivez en extension :  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$  et  $B \setminus A$ .
- c) Ecrivez toutes les inclusions possibles entre les ensembles :  $A$ ,  $B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$  et  $B \setminus A$ .

20) On donne les trois ensembles :

$$K = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, L = \{d, f, h, j, k, p\}, M = \{b, f, h, p, s, w\}$$

Recopiez et complétez par  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$  ou  $\not\subset$  :

$$\begin{array}{lllll} f \dots L & K \cap M \dots M & \{j\} \dots L \cup K & M \dots K & \emptyset \dots M \\ L \dots L & L \cup K \dots K & \{f, p\} \dots L \cap M & \{s, h\} \dots M & p \dots L \setminus M \end{array}$$

**21)** On donne  $A = \{a, b, d, e, f\}$  et  $B = \{b, c, d, e, g\}$ . Complétez par  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$  ou  $\not\subset$  :

$$\begin{array}{llll} c \dots A \cup B & f \dots A \setminus B & \{b, c, d\} \dots A & \{d, g, e\} \dots B \\ \{ \} \dots A & A \cup B \dots A \cap B & A \dots A \cap B & i \dots A \end{array}$$

**22)** Soient  $A = \{3; 4; 5; 7; 9; 17\}$ ,  $B = \{0; 3; 4; 8; 9; 10\}$  et  $C = \{0; 3; 4; 7; 10; 13\}$ .

**a)** Diagramme de Venn.

**b)** Déterminez les ensembles suivants :

$$\begin{array}{lll} A \cap B & B \cap C & A \cap C \\ A \cup B & B \cup C & A \cup C \\ A \setminus C & B \setminus A & (A \cap B) \cap C \\ A \cap (B \cap C) & (A \cup B) \setminus C & B \setminus (A \cup C) \\ A \setminus (B \setminus C) & A \cup B \cup C & (A \setminus B) \setminus C \\ A \cup (B \cap C) & (A \cup B) \cap (A \cup C) & \\ D = \{x / x \in A \text{ et } x \in B \text{ et } x \notin C\} & E = \{x / x \notin A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \in C\} & \end{array}$$

**23)** Etudiez à l'aide de diagrammes de Venn si les propriétés suivantes sont vraies ou non. Si oui, comment appelle-t-on la propriété ?

- a)**  $A \cap B = B \cap A$
- b)**  $A \cup B = B \cup A$
- c)**  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- d)**  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- e)**  $A \setminus B = B \setminus A$
- f)**  $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
- g)**  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- h)**  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- i)**  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- j)**  $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

- 24) Que peut-on dire de deux ensembles  $A$  et  $B$  si  $A \setminus B = \emptyset$  ?
- 25) On sait que  $A \cap B = \emptyset$  (figure). Quel est dans ce cas  $A \setminus B$  ?  $B \setminus A$  ?
- 26) On sait que  $A \subset B$  (figure). Quel est dans ce cas  $A \cup B$  ?  $A \cap B$  ?
- 27) On donne les trois ensembles  $A = \{4, 5, 7, 9, 11, 15, 16, 17\}$ ,  $B = \{1, 3, 4, 7, 13, 15\}$  et  $C = \{2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 15, 18\}$ .

a) Dessinez sur un même diagramme ces trois ensembles.

b) Ecrivez les ensembles suivants par énumération :

$$\begin{array}{cccc} A \cap C & B \setminus A & (B \cap C) \cap A & C \setminus (A \setminus B) \\ C \cup B & (A \cap B) \setminus C & (A \cup B) \cap C & \end{array}$$

- 28) Sachant que :  $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 8\}$ ,  $B \cap C = \{3; 4; 5\}$ ,  $A \cap B \cap C = \{3\}$ ,  $A \cap B = \{3; 8\}$ ,  $A \cap C = \{2; 3\}$  et  $B \cup C = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$  faites un diagramme de Venn et déterminez les ensembles  $A$ ,  $B$  et  $C$  en extension.

- 29) Disposez les éléments 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 dans un diagramme de Venn, sachant que :

- $A \cap C = \{1; 4; 5\}$
- $B \setminus A = \{0; 3; 6\}$
- $A \cup B \cup C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$
- $A \cap B = \{2; 4; 5; 7\}$
- $C \setminus A = \{0; 8\}$
- $A \cap B \cap C = \{4; 5\}$

- 30) Soient les ensembles :

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \quad B = \{2, 3, 5, 7, 10\} \quad C = \{1, 2, 6, 7, 8, 9\}.$$

a) Diagramme de Venn.

b) Complétez par l'un des symboles  $\in$ ,  $\notin$ ,  $\subset$  ou  $\not\subset$  :

$$\begin{array}{cccc} 6 \dots C & 5 \dots A \setminus B & B \setminus C \dots B & \{7\} \dots B \\ \emptyset \dots A & 10 \dots B \cap C & 3 \dots A \cup B & \{2, 6\} \dots A \cap C \end{array}$$

c) Déterminez les ensembles :

$$A \cap B \quad B \setminus C \quad C \cup A \quad (B \cap C) \setminus A \quad C \setminus (A \cup B)$$

- 31) On donne les trois ensembles  $A = \{a, b, d, e, f, n\}$ ,  $B = \{b, e, f, g\}$  et  $C = \{a, d, e, g, k\}$ .

a) Diagramme de Venn.

b) Déterminez :

$$A \cap B \quad B \cup C \quad A \setminus C \quad B \cap (C \setminus A) \quad (A \cap B) \setminus C$$

- 32)** Soient les ensembles  $A = \{3, 4, 5, 6, 9\}$ ,  $B = \{0, 1, 5, 6, 7, 9\}$  et  $C = \{1, 2, 3, 6, 8\}$ .
- a) Diagramme de Venn.
- b) Déterminez les ensembles suivants :
- $$A \cup B \quad B \setminus C \quad (C \setminus B) \setminus A \quad A \cap (B \cup C) \quad B \setminus (A \cap B \cap C)$$
- c) Ecrivez les ensembles suivants à l'aide des symboles  $A, B, C, \setminus, \cap, \cup$  et  $( )$  :
- $$\{6\} \text{ et } \{0, 1, 7\}$$
- 33)** Soient  $C = \{\text{carrés}\}$ ,  $L = \{\text{losanges}\}$ ,  $P = \{\text{parallélogrammes}\}$ ,  $Q = \{\text{quadrilatères}\}$ ,  $R = \{\text{rectangles}\}$  et  $T = \{\text{trapèzes}\}$ .
- a) Ecrivez toutes les inclusions possibles (non triviales <sup>1</sup>) entre ces ensembles.
- b) Que peut-on dire de  $L \cap R$  ? Justifiez !
- c) Représentez tous ces ensembles sur un même diagramme.

### Pour les problèmes suivants :

- Vous définissez des ensembles qui représentent la situation
  - Vous dessinez ces ensembles sur un diagramme de Venn aussi simple que possible
  - Vous déterminez le nombre d'éléments de chaque région du diagramme en indiquant vos calculs !
  - Vous répondez aux questions posées
- 34)** Parmi les 26 élèves d'une classe il y en a 14 qui aiment faire le français, 8 qui aiment faire les mathématiques et le français et 7 qui n'aiment faire ni le français, ni les mathématiques. Combien d'élèves aiment faire les mathématiques ?
- 35)** Dans un groupe de 10 scouts il y en a 4 qui portent un foulard, 3 qui portent un chapeau et 4 qui portent ni foulard, ni chapeau.
- a) Combien de scouts portent un foulard et un chapeau ?
- b) Combien de scouts portent un foulard mais pas de chapeau ?
- c) Combien de scouts portent un foulard ou un chapeau ?
- 36)** Dans une classe de 23 élèves, 4 élèves ne pratiquent aucun sport, 3 élèves ne pratiquent que le football, 5 élèves ne pratiquent que le basket-ball, 4 élèves ne pratiquent que le tennis, 6 élèves pratiquent le football et le basket mais pas le tennis. Le reste des élèves

---

<sup>1</sup> Une inclusion triviale est une inclusion évidente de la forme  $\emptyset \subset A$  ou  $A \subset A$ .

- pratique le basket et le tennis mais pas le football. Pour chacun de ces trois sports, trouvez le nombre d'élèves qui le pratiquent.
- 37)** Dans un groupe de 30 sportifs, 6 pratiquent la natation, 9 le tennis, 11 le football, 1 la natation et le football, 2 le tennis et le football, mais aucun qui pratique le tennis et la natation.
- Combien ne pratiquent aucun de ces trois sports ?
  - Combien ne pratiquent qu'un seul de ces trois sports ?
- 38)** Les 28 élèves d'une classe jouent tous au moins un des instruments suivants : violon, piano, guitare.
- 16 élèves jouent de la guitare.
  - 5 élèves jouent du piano seulement.
  - 6 élèves jouent du piano et du violon.
  - 3 élèves jouent de la guitare et du piano seulement.
  - 12 élèves jouent exactement deux instruments.
  - 2 élèves jouent les trois instruments.
- Combien d'élèves jouent du violon et de la guitare ?
  - Combien d'élèves ne jouent pas du piano ?
- 39)** Les élèves d'une classe ont dessiné des triangles. Christine examine ces triangles et compte 7 triangles rectangles, 12 triangles isocèles et 11 triangles obtusangles. Parmi les triangles isocèles il y en a 6 qui sont aussi obtusangles et parmi les triangles rectangles il y en a 4 qui sont en même temps isocèles. Déterminez le nombre de triangles.
- 40)** Dans une classe de 60 étudiants, les étudiants sont inscrits en informatique, en géographie et en biologie. 19 étudient l'informatique, 23 la géographie, 31 la biologie, 8 sont inscrits en informatique et en géographie, 9 en géographie et en biologie, 11 en informatique et en biologie et enfin 5 étudiants ont opté pour les 3 matières. A l'aide d'un diagramme de Venn, déterminez le nombre d'étudiants de cette classe qui :
- n'étudient aucune des 3 matières,
  - étudient exactement une des trois matières,
  - qui étudient la biologie **ou** la géographie, mais pas l'informatique.
- 41)** Dans un groupe formé de 80 personnes, 32 jouent au tennis, 17 pratiquent le golf, 11 jouent au tennis et au golf, 1 personne joue au golf et au football, 1 personne pratique

les 3 sports, 20 pratiquent exactement deux sports et chacun pratique au moins l'un des trois sports. A l'aide d'un diagramme de Venn, répondez aux questions suivantes :

- a) Combien de personnes jouent au football ?
- b) Combien de personnes pratiquent un seul sport ?
- c) Combien de personnes ne jouent qu'au tennis ?

42) Les 124 élèves d'un lycée inscrits en classe de 3<sup>e</sup> peuvent choisir d'étudier l'anglais, le français ou l'espagnol . On sait que :

- 25 n'étudient que le français ;
- 65 étudient l'anglais ;
- 33 étudient l'espagnol ;
- 15 n'étudient aucune langue ;
- 9 étudient les trois langues ;
- 22 étudient au moins deux langues ;
- 7 n'étudient que le français et l'espagnol.

A l'aide d'un diagramme de Venn déterminez :

- a) le nombre d'élèves qui étudient l'anglais *ou* l'espagnol
  - b) le nombre d'élèves qui étudient l'anglais *et* l'espagnol
  - c) le nombre d'élèves qui n'étudient que l'espagnol
  - d) le nombre d'élèves qui étudient le français et l'anglais, mais pas l'espagnol
  - e) le nombre d'élèves qui n'étudient que l'anglais
- 43) Dans une classe de 28 élèves, 15 ont un frère, 14 ont une soeur et 9 sont des enfants uniques. Combien d'élèves de cette classe ont un frère *et* une soeur ?
- 44) Dans un groupe de musiciens il y en a 15 qui aiment jouer la musique de Bach, 10 celle de Chopin, 14 celle de Mozart, 7 celle de Bach et de Mozart, 20 celle de Bach ou de Chopin et 7 qui n'aiment jouer que celle de Mozart. Enfin 10 n'aiment jouer aucun de ces trois compositeurs alors que 3 aiment les jouer tous les trois.
- a) Combien de ces musiciens aiment jouer du Bach et du Chopin ?
  - b) Combien de ces musiciens n'aiment jouer que du Bach ?
  - c) Combien de ces musiciens n'aiment jouer que du Chopin et du Mozart ?
  - d) Combien de ces musiciens n'aiment jouer que du Chopin ?
  - e) Combien de musiciens y a-t-il dans ce groupe ?
- 45) Dans un groupe de 40 touristes, 16 parlent l'allemand, 19 le français, 17 l'italien, 5 parlent l'allemand et le français, 6 l'allemand et l'italien, 7 le français et l'italien et 2 parlent ces trois langues. Combien de personnes y a-t-il dans ce groupe qui ni parlent aucune de ces trois langues ?